Fen-Edebiyat Fakültesi	ARA SINAV KAĞIDI	
Ad Soyadı:	Bölümü: Matematik	NOTU
Numarası:	Dersin Adı: Kısmi Türevli Denklemler	
İmza:	Sınav Tarihi: 20 Kasım 2023	

Süre 75dk. Her soru eşit puandır.

Lagrange-Charpit Denklemleri:

$$\frac{dx}{F_p} = \frac{dy}{F_q} = \frac{dz}{pF_p + qF_q} = \frac{dp}{-(F_x + pF_z)} = \frac{dq}{-(F_y + qF_z)}$$

1. $(x-y)y^2 p + (y-x)x^2 q = (x^2+y^2)z$ kısmi türevli denkleminin $xz = 1$, $y = 0$ başlangıç eğrisinden geçen çözümünü bulun.

$$\boxed{z = \frac{(x-y)}{(x^3+y^3)^{2/3}}}$$

$$\frac{dx}{(x-y)y^2} = \frac{dy}{(y-x)x^2} = \frac{dz}{(x^2+y^2)z}$$

$$\frac{dx}{-y^2} = \frac{dy}{x^2} \qquad x^2dx + y^2dy = 0 \qquad \boxed{u_1 = x^3 + y^3 = c_1}$$

$$\frac{dx-dy}{(x-y)(y^2+x^2)} = \frac{dz}{(x^2+y^2)z} \Rightarrow \frac{d(x-y)}{x-y} = \frac{dz}{z}$$

$$u_2 = \frac{z}{x-y} = c_2$$

Genel Çözüm:

$$\frac{z}{x-y} = f(x^3+y^3)$$

Başlangıç Koşulu: $y=0$, $z = \frac{1}{x}$

$$\frac{1}{x^2} = f(x^3) \Rightarrow f(w) = \frac{1}{w^{2/3}}$$

$$w = x^3 \Rightarrow x = w^{1/3}$$

2. $2x\,dx+\left(\dfrac{2x^2+2z-y^3}{y}\right)dy+dz=0$ Pfaff denkleminin (a) integrallenebilir olduğunu gösterin, (b) ilkel fonksiyonunu elde edin.

$$\boxed{\phi = y^2\left(x^2+z-\frac{y^3}{5}\right)=c}$$

(b)

$y=$ sbt. alalım.

$$2x\,dx+dz=0 \Rightarrow u=x^2+z=c$$

$$du=2x\,dx+dz=-2\frac{(x^2+z)}{y}dy+y^2dy=-\frac{2u}{y}dy+y^2dy$$

$$\frac{du}{dy}+\frac{2}{y}u=y^2 \qquad \mu=e^{\int\frac{2}{y}dy}=e^{2\ln y}=y^2.$$

$$\frac{d}{dy}\left[u\cdot y^2\right]=y^2\cdot y^2 \Rightarrow uy^2=\int y^4dy=\frac{y^5}{5}+c \Rightarrow u=\frac{y^3}{5}+\frac{c}{y^2}.$$

$$x^2+z=\frac{y^3}{5}+\frac{c}{y^2}$$

3. $p^2 y(1+x^2) - qx^2 = 0$ nonlineer denkleminin tam çözümünü belirleyin.

$$\boxed{z = a\sqrt{1+x^2} + \frac{a^2 y^2}{2} + b}$$

$$\underbrace{\frac{p^2(1+x^2)}{x^2}}_{f(x,p)} = \underbrace{\frac{q}{y}}_{g(y,q)}$$

$F = f - g = 0 \qquad F_z = 0$

$$\frac{dx}{F_p} = \frac{dp}{-F_x} \Rightarrow \frac{dx}{f_p} = \frac{dp}{-f_x} \Rightarrow f_x dx + f_p dp = 0$$

$dp = 0$

$$\boxed{f = a^2 = g}$$

$$\frac{p^2(1+x^2)}{x^2} = a^2 \Rightarrow p = \frac{ax}{\sqrt{1+x^2}}$$

$q = a^2 y$

$dz = p\,dx + q\,dy$

$$= \frac{ax}{\sqrt{1+x^2}}dx + a^2 y\,dy$$